Теория вероятности в заданиях ЕГЭ по математике

Панасенкова Ольга Ивановна
учитель математики
СОГБОУ «Екимовичская средняя школа-интернат для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья»

Цель: Научить решать задач по теории вероятностей и применять теоремы сложения и умножения вероятностей, формулы, для сдачи ЕГЭ по математике, которые будут в 4 и 5 заданиях ЕГЭ по математике (профильный уровень).

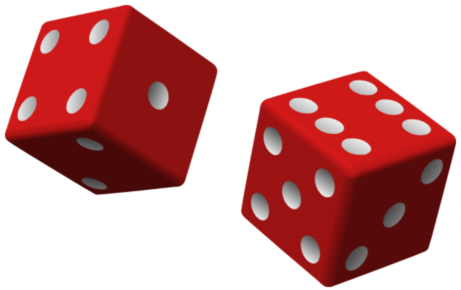
Задачи:

1. Рассмотреть способы решения задач по теории вероятностей для сдачи ЕГЭ по математике.

2 . Раскрыть методику изучения элементов математической статистики.

3. Представить методику изучения элементов теории вероятностей.

4. Описать методику изучения элементов комбинаторики.



Элементарные события (исходы) – простейшие события, которыми может окончится случайный опыт.

Сумма вероятностей всех элементарных событий равна 1.

P(A) равна сумме вероятностей элементарных событий, благоприятствующих этому событию.

- *$A \cup B$ (объединение) – событие, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих хотя бы одному из событий A,B*
- *$A \cap B$ (пересечение) – событие, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих обоим событиям A и B.*
- *$\bar{A}$ называется противоположным событию A, если состоит из тех и только тех элементарных исходов, которые не входят в A.*

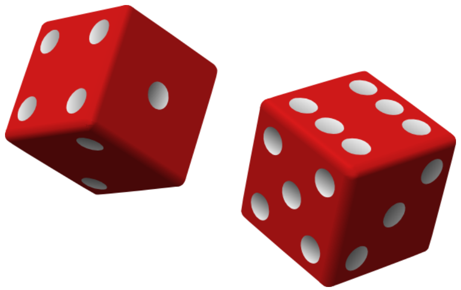
Несовместные события – это события, которые не наступают в одном опыте.

Классическое определение вероятности

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

m – число благоприятствующих событию А исходов

n – число всех элементарных равновозможных исходов



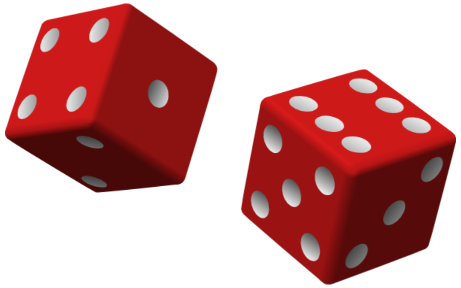
Вероятность суммы событий

Теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий:

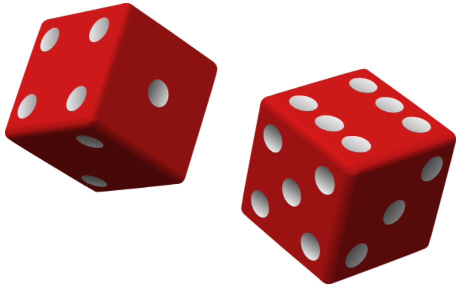
$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



Вероятность произведения событий

Два события называются независимыми, если появление одного из них не изменяет вероятность появления другого.

События называются зависимыми, если одно из них влияет на вероятность появления другого.



Теорема умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A),$$
$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B).$$

$P(A/B)$ – *условная вероятность события А при условии, что произошло событие В,*
$P(B/A)$ – *условная вероятность события В при условии, что произошло событие А.*

Задача 1.

Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках равны 0,6; 0,7 и 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится: 1) только в одном справочнике; 2) только в двух справочниках; 3) во всех трех справочниках.

Решение:

A = {формула содержится в первом справочнике};
B = {формула содержится во втором справочнике};
C = {формула содержится в третьем справочнике}.

Воспользуемся теоремами сложения и умножения вероятностей.

$P(A) = 0{,}6 \qquad P(B) = 0{,}7 \qquad P(C) = 0{,}8$

$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4 \quad P(\overline{B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3 \quad P(\overline{C}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

1). $P(A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C) = P(A\overline{B}\,\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\,\overline{B}C) =$

$= 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}188$

2). $P(AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC) = P(AB\overline{C}) + P(A\overline{B}C) + P(\overline{A}BC) =$

$= 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}452$

3). $P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}336$

Ответ: 1). 0,188; 2). 0,452; 3). 0,336.

Задача 2.

Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

Решение:

$A = \{$батарейка бракованная$\}$; $P(A) = 0,06$

$\bar{A} = \{$батарейка исправная$\}$ $P(\bar{A}) = 1 - 0,06 = 0,94$

$P(\bar{A}\bar{A}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0,94 \cdot 0,94 = 0,8836$

Ответ: 0,8836

Задача 3.

Какова вероятность того, что случайно выбранный телефонный номер оканчивается двумя чётными цифрами?

Решение:

$A = \{$*последняя цифра номера телефона – четная*$\}$;

$B = \{$*предпоследняя цифра номера телефона – четная*$\}$

$P(A) = 0,5$ $P(B) = 0,5$

$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$

Ответ: 0,25

Задача 4.

Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение:

A = {чайник прослужит больше года, но меньше двух лет},
B = {чайник прослужит больше двух лет},
C = {чайник прослужит ровно два года},

тогда A + B + C = {чайник прослужит больше года}.

События A, B и C несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий. Вероятность события C, состоящего в том, что чайник выйдет из строя ровно через два года — строго в тот же день, час и секунду — равна нулю.

Тогда: $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = P(A) + P(B)$,

откуда, используя данные из условия, получаем

$$0{,}93 = P(A) + 0{,}87.$$

Тем самым, для искомой вероятности имеем:

$$P(A) = 0{,}93 - 0{,}87 = 0{,}06$$

Ответ: 0,06.

Задача 5.

Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 18 пассажиров, равна 0,82. Вероятность того, что окажется меньше 10 пассажиров, равна 0,51. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 10 до 17.

Решение:

A = {*в автобусе меньше* 10 *пассажиров*}, $P(A) = 0{,}51$

B = {*в автобусе от* 10 *до* 17 *пассажиров*}, $P(B) =$ **?**

Тогда $A + B$ = {*в автобусе меньше* 18 *пассажиров*}, $P(A + B) = 0{,}82$

События A *и* B *несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:* $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

$0{,}82 = 0{,}51 + P(B)$, *откуда* $P(B) = 0{,}82 - 0{,}51 = 0{,}31$

Ответ: 0,31.

Задача 6.

Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур.

Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Решение:

A = {шахматист А. выигрывает белыми фигурами}, $P(A) = 0{,}5$

B = {шахматист А. выигрывает чёрными фигурами}. $P(B) = 0{,}3$

Возможность выиграть первую и вторую партию не зависят друг от друга. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей:

$P(AB) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$

Ответ: 0,15.

Задача 7.

Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Решение:

A = {*биатлонист попал в мишень*}, $P(A) = 0{,}8$

$\bar{A}$ = {*биатлонист промахнулся*}, $P(\bar{A}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

События попасть или промахнуться при каждом выстреле независимы, вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей.

$$P(AAA\bar{A}\bar{A}) = 0{,}8 \cdot 08 \cdot 08 \cdot 02 \cdot 02 = 0{,}02048 \approx 0{,}02$$

Ответ: 0,02.

Задача 8.

Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение:

	1 – я лампа	2 – я лампа
1	перегорит	перегорит
2	перегорит	не перегорит
3	не перегорит	перегорит
4	не перегорит	не перегорит

A = {перегорели обе лампы},

$\bar{A}$ = {не перегорела хотя бы одна лампа},

$P(\bar{A}) = ?$

$P(A) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$

$P(\bar{A}) = 1 - 0,09 = 0,91$

Ответ: 0,91.

Задача 9.

В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение:

	3.07	4.07	5.07	6.07
1	x	x	x	o
2	x	x	o	o
3	x	o	x	o
4	x	o	o	o

$$P(xxo) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}128$$

$$P(xoo) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}128$$

$$P(oxo) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}008$$

$$P(ooo) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}128$$

Указанные события несовместные $\Rightarrow$

$$P = 0{,}128 + 0{,}128 + 0{,}008 + 0{,}128 = 0{,}392$$

Задача 10. У жителя А. волшебной страны бывает два типа настроения: прекрасное и замечательное, причём настроение, установившись утром , держится неизменным весь день. Известно , что с вероятностью 0,8 настроение жителя А. завтра будет таким же , как и сегодня. Сегодня 10 апреля, настроение жителя А прекрасное . Найдите вероятность того, что 13 апреля у жителя А. настроение будет замечательным ?

Решение:

	10.04	11.04	12.04	13.04
1	п	п	п	з
2	п	п	з	з
3	п	з	п	з
4	п	з	з	з

$$P(ппз) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,128$$

$$P(пзз) = 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,128$$

$$P(зпз) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008$$

$$P(ззз) = 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,128$$

Указанные события несовместные $\Rightarrow$

$$P = 0,128 + 0,128 + 0,008 + 0,128 = 0,392$$

Задача 11. *Вероятность дожить до 100 лет на настоящий момент без учета текущего возраста для жителя Японии составляет 16%, Китая – 10%, Индии – 6%. Какова вероятность, что хотя бы один из однокурсников Аристарха Лукова – Арбалетова – японец, китаец и индус доживет до 100 лет, если после обучения в России вернутся в родные страны?*

Решение:

A = {*японец доживет до 100 лет*}, $P(A) = 0{,}16$ $P(\overline{A}) = 0{,}84$

B = {*китаец доживет до 100 лет*}, $P(B) = 0{,}1$ $P(\overline{B}) = 0{,}9$

C = {*индус доживет до 100 лет*}, $P(C) = 0{,}06$ $P(\overline{C}) = 0{,}94$

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 1 - 0{,}84 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}94 = 0{,}28963$$

Ответ: 0,28963

Задача 12. *Команда бобслеистов состоит из четырёх человек. Если хотя бы один спортсмен заболеет, то команда не выходит на старт. Вероятность заболеть для первого участника команды составляет 0,1, для второго – 0,2, для третьего – 0,3, для четвертого – 0,4. Какова вероятность того, что команда бобслеистов не выйдет на старт?*

Решение:

A = {*заболел первый участник*}, $P(A) = 0{,}1$ $P(\overline{A}) = 0{,}9$

B = {*заболел второй участник*}, $P(B) = 0{,}2$ $P(\overline{B}) = 0{,}8$

C = {*заболел третий участник*}, $P(C) = 0{,}3$ $P(\overline{C}) = 0{,}7$

D = {*заболел четвертый участник*}, $P(D) = 0{,}4$ $P(\overline{D}) = 0{,}6$

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}) =$$

$$= 1 - 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}6976$$

Ответ: 0,6976

ЗАДАНИЕ №4

По отзывам покупателей Игорь Игоревич оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,94. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,8. Игорь Игоревич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

Ответ: 0,012

ЗАДАНИЕ №4

4 Один стрелок дает 80% попаданий в цель, а другой в тех же условиях - 70%. Найдите вероятность поражения цели, если оба стрелка стреляют в нее одновременно.

Ответ: ____________________________.

Ответ: 0,94

ЗАДАНИЕ №4

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,04. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: 0,086

ЗАДАНИЕ № 4

Из множества чисел от 20 до 29 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 4?

Ответ: 0,3

ЗАДАНИЕ №4

В городе N есть три фабрики, выпускающие автомобильные шины. Первая фабрика выпускает 30% этих шин, вторая — 45%, третья — 25%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных шин, вторая — 6%, третья — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленная в магазине шина не окажется бракованной.

Ответ: 0,9615

Список литературы:

Колемаев В. А., Калинина В. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. – Кнорус, 2017.

Справочники

1. Лысенко Ф.Ф., Кулабухов С.Ю. Математика. 7-11 классы. Карманный справочник – Легион, 2020 Роганин А.Н., Захарийченко Л.И., Захарийченко Ю.А. ЕГЭ. Математика. Универсальный справочник - Эксмо-Пресс, 2020 г.

Интернет-ресурсы

Российская электронная школа – https://resh.edu.ru Сдам ГИА. Образовательный портал для подготовки к экзаменам – https://ege.sdamgia.ru Федеральный институт педагогических измерений – http://www.fipi.r